

Géométrie algébrique/ *Algebraic geometry*.

Rang de courbes elliptiques d'invariant donné.

Jean-François Mestre.

Résumé.- Nous montrons qu'il existe une infinité de courbes elliptiques définies sur \mathbf{Q} , d'invariant modulaire donné, et de rang ≥ 2 . De plus, il existe une infinité de courbes définies sur \mathbf{Q} , d'invariant nul (resp. égal à 1728), et de rang ≥ 6 (resp. ≥ 4).

On the rank of elliptic curves with given modular invariant.

Abstract.- We prove that there exist infinitely many elliptic curves over \mathbf{Q} with given modular invariant, and rank ≥ 2 . Furthermore, there exist infinitely many elliptic curves over \mathbf{Q} with invariant equal to 0 (resp. 1728), and rank ≥ 6 (resp. ≥ 4).

Soit k un corps de caractéristique nulle, et t une indéterminée. Nous prouvons ici les théorèmes suivants:

Théorème 1 *Soit j un élément de k . Il existe une courbe elliptique définie sur $k(t)$, d'invariant modulaire j , qui n'est pas $k(t)$ -isomorphe à une courbe elliptique définie sur k , et qui possède deux points rationnels sur $k(t)$ linéairement indépendants.*

Théorème 2 *Il existe une courbe elliptique définie sur $k(t)$, dont l'invariant modulaire est égal à 1728 (resp. 0), qui n'est pas $k(t)$ -isomorphe à une courbe définie sur k , et qui possède 4 (resp. 6) points rationnels sur $k(t)$ linéairement indépendants.*

On en déduit par spécialisation les corollaires suivants:

Corollaire 1 *Soit j un élément de \mathbf{Q} . Il existe une infinité de courbes elliptiques définies sur \mathbf{Q} , non deux à deux \mathbf{Q} -isomorphes, d'invariant modulaire j , dont le rang du groupe de Mordell-Weil est ≥ 2 .*

Corollaire 2 *Il existe une infinité de courbes elliptiques définies sur \mathbf{Q} , d'invariant modulaire égal à 1728 (resp. 0), non deux à deux \mathbf{Q} -isomorphes, dont le rang du groupe de Mordell-Weil est ≥ 4 (resp. ≥ 6).*

1 Démonstration du théorème 1

Théorème 3 *Soient k un corps de caractéristique nulle, et E et E' deux courbes elliptiques définies sur k . On suppose que les invariants modulaires $j(E)$ et $j(E')$ ne sont pas simultanément égaux à 0 ou à 1728. Il existe alors une courbe C , revêtement quadratique de la droite projective, définie sur k , et deux morphismes indépendants $p: C \rightarrow E$ et $p': C \rightarrow E'$ définis sur k .*

(On rappelle que deux morphismes $p : C \rightarrow E$ et $p' : C \rightarrow E'$ sont dits indépendants si les images réciproques par p^* et p'^* des formes de première espèce de E et E' sont linéairement indépendantes.)

Soient $y^2 = x^3 + ax + b$ une équation de E et $y^2 = x^3 + a'x + b'$ une équation de E' . L'hypothèse sur $j(E)$ et $j(E')$ implique que $a = 0 \rightarrow a' \neq 0$ et $b = 0 \rightarrow b' \neq 0$.

Posons $f(x) = x^3 + ax + b$ et $g(x) = x^3 + a'x + b'$. Si u est une indéterminée, l'équation (en x)

$$u^6 f(x) = g(u^2 x)$$

a pour solution $x = \phi(u)$, avec $\phi(u) = -\frac{b' - u^6 b}{u^2(a' - u^4 a)}$.

Soit C la courbe d'équation $Y^2 = f(\phi(X))$. Soient $\rho : C \rightarrow E$ et $\rho' : C \rightarrow E'$ les morphismes donnés par $\rho(X, Y) = (x = \phi(X), y = Y)$ et $\rho'(X, Y) = (x = X^2 \phi(X), y = X^3 Y)$. Si $\omega = \rho^*(dx/y)$ et $\omega' = \rho'^*(dx/y)$, on a

$$\omega/\omega' = \frac{3aX^4b' - 2X^6ba' - b'a'}{X^3(X^6ba - 3X^2ba' + 2ab')},$$

fraction rationnelle en X non constante. Par suite, ω et ω' sont indépendantes dans l'espace des formes différentielles de première espèce de C , d'où le théorème.

REMARQUE. Le calcul montre que le genre de C est ≤ 10 . Plus précisément, si l'invariant modulaire $j(E)$ de E n'est pas égal à $j(E')$, et si $j(E)$ et $j(E')$ sont distincts de 0 et 1728, le genre de C est égal à 10. Si $j(E) = j(E')$, et distinct de 0 et 1728, le genre de C est égal à 6. Si $j(E) = 1728$, et $j(E') \neq 0$, le genre de C vaut 7. Si $j(E) = 0$, et $j(E') \neq 1728$, le genre de C vaut 8. Enfin, si $j(E) = 0$ et $j(E') = 1728$, le genre de C vaut 5.

Théorème 4 *Soient k un corps de caractéristique nulle, et j un élément de k . Il existe une courbe C définie sur k , revêtement quadratique de la droite projective, une courbe elliptique E définie sur k d'invariant j , et deux morphismes indépendants p et p' de C dans E définis sur k .*

Si $j \in k$, $j \neq 0, 1728$, et si $a = b = \frac{27j}{4(j - 1728)}$, la courbe elliptique E , définie sur k , d'équation $y^2 = x^3 + ax + b$ a comme invariant modulaire j . Le théorème précédent permet donc de conclure, sauf si $j = 0$ ou $j = 1728$.

Or la jacobienne de la courbe de genre 2, définie sur \mathbf{Q} , d'équation $y^2 = x^6 + 1$ est \mathbf{Q} -isogène au produit de la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 1$, d'invariant modulaire égal à 0, avec elle-même. D'où le résultat si $j = 0$.

De même, soit C la courbe de genre 2 d'équation $y^2 = (t^2 + 1)(t^2 - 2)(2t^2 - 1)$.

Les morphismes $(t, y) \mapsto (t^2, y)$ et $(t, y) \mapsto (1/t^2, y/t^3)$ définissent deux revêtements de C sur la courbe elliptique d'équation $y^2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1)$, dont l'invariant modulaire vaut 1728. Cela achève la démonstration du théorème.

REMARQUES.- Si E est une courbe elliptique définie sur k , il est parfois possible de trouver une courbe hyperelliptique définie sur k , de genre < 10 ,

dont la jacobienne est k -isogène à $E \times E \times A$, où A est une variété abélienne convenable. Par exemple:

1) Soit E une courbe elliptique définie sur k d'équation $y^2 = x^3 - ax + b$, où a est non nul et de la forme $\alpha^2 + 3\beta^2$, $\alpha, \beta \in k$. La conique $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = a$ est alors k -isomorphe à la droite projective, d'où l'existence de deux fractions rationnelles $x_1(t)$ et $x_2(t)$ telles que la fraction rationnelle $f(t) = x_1^3 - ax_1 + b$ soit égale à la fraction rationnelle $x_2^3 - ax_2 + b$. On en déduit 2 applications rationnelles $(t, y) \mapsto (x_1(t), y)$ et $(t, y) \mapsto (x_2(t), y)$ de la courbe C d'équation $y^2 = f(t)$ sur E . Les fractions rationnelles x'_1 et x'_2 n'étant pas proportionnelles, et la courbe C étant de genre 3, on en déduit que la jacobienne de la courbe C est k -isogène à $E \times E \times E_1$, où E_1 est une courbe elliptique définie sur k .

2) Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques, définies sur k , dont les points d'ordre 2 appartiennent à k . Si $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ (resp. $y^2 = (x - a')(x - b')(x - c')$) est une équation de E_1 (resp. E_2), quitte à permuter les rôles de a, b, c , on peut trouver une application affine $x \mapsto h(x) = \alpha x + \beta$ telle que $h(a) = a'$, $h(b) = b'$, et $h(c) \neq c'$. La jacobienne de la courbe de genre 2 d'équations

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c), \quad z^2 = \alpha(x - a)(x - b)(x - h^{-1}(c'))$$

est alors isogène à $E_1 \times E_2$.

Le théorème 1 découle aisément du théorème précédent. En effet, si $j \in k$, d'après le théorème précédent, il existe une courbe C , définie sur k , revêtement quadratique de la droite projective, une courbe elliptique E définie sur k d'invariant j , et deux morphismes indépendants p_1 et p_2 de C sur E . Soit w l'involution hyperelliptique de C ; les morphismes $p_1 \circ w + p_1$ et $p_2 \circ w + p_2$ de C dans E sont constants, car w agit sur la jacobienne de C comme -1 . Par suite, les morphismes $p'_1 = p_1 \circ w - p_1$ et $p'_2 = p_2 \circ w - p_2$ sont indépendants; si $y^2 = f(t)$ est une équation de C , et si E_w est la courbe obtenue à partir de E par torsion par $\sqrt{f(t)}$, les points $P_1 = p'_1(t, \sqrt{f(t)})$ et $P_2 = p'_2(t, \sqrt{f(t)})$ sont des points indépendants de E_w , rationnels sur $k(t)$. D'où le théorème 1.

2 Démonstration du théorème 2

2.1 Le cas des courbes d'invariant $j = 1728$

Soit $p(x) = x^4 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un élément de $k[x]$, dont les racines x_i , $1 \leq i \leq 4$, appartiennent à k , et sont de somme nulle. La courbe E d'équation $x^4 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ possède 4 points k -rationnels naturels, à savoir les points $P_i = (x_i, x_i)$. Si $a_0 = -u^4$, où $u \in k$, E possède un nouveau point k -rationnel, à savoir le point $O = (-u, 0)$. Si $a_2(a_1^2 - 4a_0a_2) \neq 0$, la courbe E est de genre 1, et d'invariant modulaire égal à 1728.

Or l'équation $a_0 = -u^4$ s'écrit $x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = u^4$.

Comme me l'a indiqué J.-P. Serre, cette équation a été étudiée par Euler ([1], p. 660), qui a exhibé plusieurs courbes unicursales tracées sur S , par exemple

la courbe

$$u = 1, \quad x_1 = t \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2t^2 - 1}{2t(2t^2 + 1)}, \quad x_3 = \frac{4t}{2t^2 - 1}.$$

Soit donc $x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$, où les x_i sont donnés par les formules ci-dessus, et soit $p = \prod (x - x_i) = x^4 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. La courbe E , définie sur $k(t)$, d'équation $x^4 + a_2y^2 + a_1y + a_0$ est de genre 1; elle est $k(t)$ -isomorphe à la courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + a_2(a_1^2 - 4a_0a_2)x$.

On vérifie que $a_2(a_1^2 - 4a_0a_2)$ n'est pas une puissance quatrième dans $k(t)$; par suite, E n'est pas $k(t)$ -isomorphe à une courbe définie sur k .

Pour prouver que les 4 points P_i sont indépendants, le point O étant choisi comme origine, et démontrer ainsi l'assertion du théorème 2 relative aux courbes d'invariant 1728, il suffit de vérifier que, pour une valeur de t , les spécialisations des points P_i sont des points indépendants.

Or, pour $t = 1$, le calcul, à l'aide du logiciel gp, montre que le déterminant de la matrice des hauteurs des spécialisations des points P_i est égal à 603.61237..., et est donc non nul.

2.2 Le cas des courbes d'invariant 0

Soit $p \in k[X]$ un polynôme unitaire de degré 6. Il existe alors un unique polynôme unitaire $g \in k[X]$, de degré 2, tel que le polynôme $r = p - g^3$ soit de degré ≤ 3 .

Supposons que les racines x_1, \dots, x_6 de p soient dans k . La courbe E d'équation $r(x) + y^3 = 0$ contient les 6 points k -rationnels $P_i = (r(x_i), g(x_i))$, $1 \leq i \leq 6$.

De plus, si le discriminant de r est non nul, la courbe E est de genre 1 et d'invariant modulaire égal à 0.

Si le coefficient de degré 3 de r est le cube d'un élément de k , l'un des points à l'infini de E est k -rationnel, et on peut le choisir comme origine O de la courbe elliptique E . Nous allons montrer que, si les x_i sont convenablement choisis, les points P_i sont alors indépendants.

Sans nuire à la généralité du problème, on peut supposer que la somme des racines x_i de p est nulle. On peut donc écrire p sous la forme $p(x) = x^6 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. On a alors

$$g(x) = x^2 + a_4/3, \quad r(x) = a_3x^3 + (a_2 - a_4^2/3)x^2 + a_1x - a_4^3/27.$$

Le coefficient a_3 du polynôme p est homogène de degré 3 en les racines x_i de p . L'hypersurface cubique (en les variables u et x_i , $1 \leq i \leq 5$) d'équation $u^3 = a_3$ possède des sous-variétés linéaires k -rationnelles naturelles, par exemple $u = 0, x_1 = x_2 = x_3 = -x_4 = -x_5$.

Par des manipulations classiques, cela permet d'obtenir des courbes unicursales tracées sur cette hypersurface. On trouve par exemple

$$\begin{aligned} x_1 &= -126(35t - 19)(14t - 13)(t + 1), & x_2 &= 63(-980t^3 + 3549t - 3084t + 1135), \\ x_3 &= 126(35t - 19)(14t - 13)(t + 1), & x_4 &= 63(1127t^3 - 3108t^2 + 3525t - 988), \\ x_5 &= -113876t^3 + 265629t^2 - 259980t + 69103, & x_6 &= 104615t^3 - 293412t^2 + 232197t - 78364. \end{aligned}$$

On obtient ainsi, par la méthode décrite ci-dessous, une courbe elliptique E , définie sur $k(t)$, munie de 6 points $k(t)$ -rationnels. Cette courbe est $k(t)$ -isomorphe à la courbe $y^2 = x^3 - 16D$, où D est le discriminant du polynôme r .

On vérifie que D est un polynôme irréductible sur $k(t)$, et n'est donc pas une puissance sixième. Par suite, E n'est pas $k(t)$ -isomorphe à une courbe définie sur k .

Pour prouver que les points P_i sont indépendants, le point O étant choisi comme origine, il suffit de le montrer pour une valeur convenable de t . Or, pour $t = 1$, le déterminant de la matrice des hauteurs normalisées des points P_i vaut 38462030713.186929..., et est donc non nul.

RÉFÉRENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] L. DICKSON, *History of the theory of numbers*, vol. 2, Chelsea 1971.

UFR de Mathématiques, Université de Paris VII
2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.